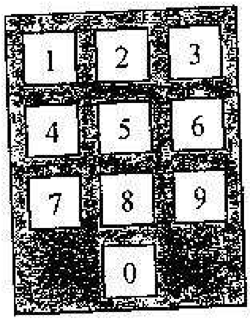
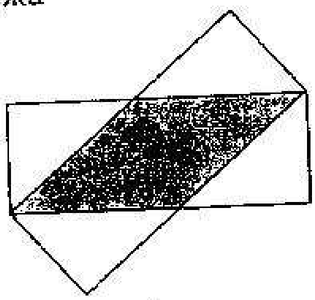
Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
17.04.2010.
VII РАЗРЕД

1. Ако је x природан број већи од 1 и $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}$, колико је $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$ и x?

2. Типке на телефону су распоређене тако да је растојање између центара 2 суседне типке 12mm (суседне су типке које су лево, десно, горе или доле од посматране). Да ли је најкраћа изломљена линија која је „повучена прстом“ када бирамо број Друштва математичара Србије 0113036818, рачунајући да притискамо увек тачно у центар типке, дужа од 21cm?



3. Два подударна правоугаоника који се преклапају као на слици имају странице дужине 5cm и 12cm. Израчунај површину осенченог дела.



4. Да ли постоји n-тоугао код кога је укупан број дијагонала за 2010 већи од броја страница?

5. Одреди последњу цифру броја $\frac{44^{44}}{2}$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗЕД

1. Користећи квадрат бинома добијамо:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}+2=\frac{100}{9}=\left(\frac{10}{3}\right)^2$$

Зато је $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ **(7 бодова)**. Слично, из $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2$ следи $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$ **(8 бодова)**. Сабирањем последње две једнакости је $2x=\frac{19}{3}+\frac{8}{3}=\frac{18}{3}=6$, па је $x=3$. **(5 бодова)**

2. Нека је растојање суседних типки једнако $x=12mm$. Из Питагорине теореме растојање између бројева 0 и 1 је једнако $\sqrt{x^2+(3x)^2}=x\sqrt{10}$. Растојање између типки 1 и 1 је једнако 0, док је растојање имеђу типки 1 и 3 је једнако $2x$ **(5 бодова)**. Користећи симетрију добијамо да је најкраћа црта која је „повучена прстом“ дужине $x\sqrt{10}+0+2x+x\sqrt{10}+x\sqrt{10}+x+x\sqrt{2}+x\sqrt{5}+x\sqrt{5}$,
односно $3x\sqrt{10}+2x\sqrt{5}+x\sqrt{2}+3x$ **(7 бодова)**. Сада процењујемо $12\cdot(3\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+3)>12\cdot(3\cdot 3+2\cdot 2{,}2+1{,}4+3)=12\cdot 17{,}8=213{,}6$ **(8 бодова)**, па је најкраћа црта већа од $210mm$.

3. Због симетрије осенчени део је ромб, који има висину 5 cm **(10 бодова)**. Нека је страница паралелограма једнака a. Из Питагорине теореме добијамо $(12-a)^2+5^2=a^2$, односно $a=\frac{169}{24}$ **(5 бодова)**. Сада је површина осенченог дела управо једнака $a\cdot h=\frac{169}{24}\cdot 5$, $P=\frac{845}{24}\text{cm}^2$ **(5 бодова)**.

4. Укупан број дијагонала n-тоугла једнак је $\frac{n(n-3)}{2}$. Из услова задатака добијамо једнакост $\frac{n(n-3)}{2}=n+2010$ **(5 бодова)**. Сређивањем се добија $n(n-5)=4020=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ **(5 бодова)**. Бројеви n и $n-5$ дају исти остатак при дељењу са 5, па је производ $n(n-5)$ дељив са 25 или није дељив са 5. Производ $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ је дељив